บทที่ 4
การแก้ปัญหาการแพร่และการพา
The Finite Volume Method for Convection-Diffusion Problems

4.1 บทนำ

ในปัญหาการไหลที่ซึ่งมีการแพร่อย่างสม่ำเสมอจะพบว่าจะมีปัญหาการไหลแบบการพาตามมาด้วยเสมอ การแพร่และการพาที่เกิดขึ้นด้วยกันและเป็นการไหลแบบคงตัวสามารถที่จะสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$div(\rho.u.\phi) = div(\Gamma grad\phi) + S_\phi \tag{4.1}$$

เมื่อ $u = u_i + v_j$ และ ϕ เป็นคุณสมบัติการไหลที่มีค่าเป็น 1 หรือ u หรือ v เรียกสมการนี้ว่าสมการการส่งถ่าย (transport equation) เทอมทางซ้ายเป็นเทอมของการพา (convective term) เทอมนี้แสดงปริมาณสุทธิของคุณสมบัติ ϕ เทอมทางขวามือคือเทอมของการแพร่ (diffusive term) เทอมนี้จะแสดงคุณสมบัติที่เพิ่มขึ้นของ ϕ อันเนื่องมาจากการแพร่ผ่านขอบเขตเข้าสู่เอลิเมนต์ เทอมที่สองทางขวาเรียกว่าเทอมซอส (source term) เป็นเทอมที่เหลือจากการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบที่กำหนด

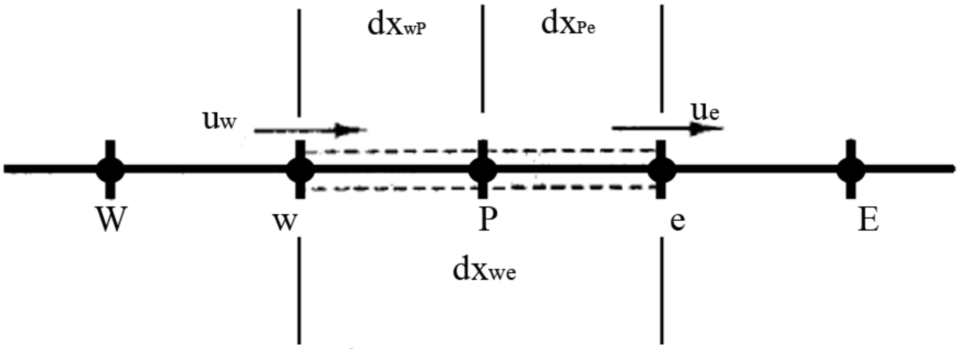
4.2 การไหลแบบการแพร่และการพาแบบคงตัวใน 1 มิติ

เมื่อไม่มีซอสเทอมสมการสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d}{dx}(\rho.u.\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) \tag{4.2}$$

จากสมการต่อเนื่องจะได้

$$\frac{d(\rho.u)}{dx} = 0 \tag{4.3}$$



รูปที่ 4.1 แสดงปริมาตรควบคุม ใน 1 มิติ

จากสมการที่ 4.2 และจากรูปที่ 4.1ทำให้เป็นสมการผลต่างได้ดังนี้

$$(\rho.u.A.\phi)_e - (\rho.u.A.\phi)_w = \left(\Gamma A\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_e - \left(\Gamma A\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_w \tag{4.4}$$

และจากสมการต่อเนื่อง 4.3 จะได้

$$(\rho.u.A)_e - (\rho.u.A)_w = 0 \tag{4.5}$$

จากสมการที่ 4.4 กำหนดให้

$$F = \rho u \quad \text{และ} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

ดังนั้นผิวหน้าของเซลล์สามาเขียนสมการในรูปของ F และ D ได้ดังนี้

$$F_w = (\rho.u)_w \tag{4.6a}$$

$$F_e = (\rho.u)_e \tag{4.6b}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \tag{4.6c}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \tag{4.6d}$$

สมมุติ $A_w = A_e = A$ และใช้วิธีผลต่างกลางทำให้เป็นสมการผลต่างได้

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{4.7}$$

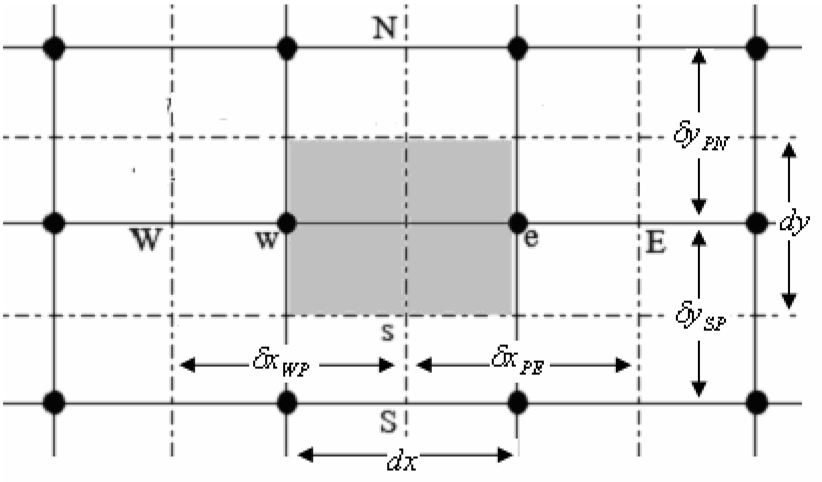
อินทิเกรตสมการต่อเนื่อง สมการที่ 4.5

$$F_e - F_w = 0 \tag{4.8}$$

สมมุติว่ารู้คุณสมบัติบางประการ สามารถที่จะประเมินค่า F_e และ F_w ได้โดยสมการ 4.7 สมมารถคำนวณหาคุณสมบัติการส่งถ่าย ϕ ที่ผิวหน้า e และ w ได้

4.3วิธีผลต่างกลาง (The central differencing scheme)

สำหรับปัญหาการไหลซึ่งมีรูปสมการเป็นแบบไม่เชิงซ้อน เมื่อใช้วิธีผลต่างกลางประยุกต์เข้าแก้ปัญหามักจะมีปัญหาในการหาผลเฉลย กล่าวคือเมื่อค่าเรย์โนลด์มีค่าสูงและใช้วิธีผลต่างต้นกระแสในการคำนวณจะทำให้การคำนวณขาดเสถียรภาพ ผลเฉลยที่ได้คลาดเคลื่อนจากวิธีแม่นตรง



รูปที่ 4.2 รายละเอียดของกริดแบบ Node- centered แบบ 2 มิติ

จากรูปที่ 4.2 สามารถเขียนสมการแสดงคุณสมบัติของ ϕ ได้ดังนี้

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \tag{4.9a}$$

$$\phi_w = \frac{(\phi_W + \phi_P)}{2} \tag{4.9b}$$

นำค่า ϕ_e และ ϕ_w แทนที่ในเทอมของการพาในสมการที่ 4.7 จะได้

$$\frac{F}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{4.10}$$

สามารถเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2}\right)\right]\phi_P = \left(Dw + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E \tag{4.11a}$$

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) + (F_e - F_w)\right]\phi_P = \left(Dw + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E \tag{4.11b}$$

เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์หน้า ϕ_W, ϕ_E เป็น a_W, a_E ทำให้เป็นสมการผลต่างได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \tag{4.12}$$

ซึ่ง

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \qquad (4.13a)$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \qquad (4.13b)$$

$$a_p = a_W + a_E + (F_e - F_w) \qquad (4.13c)$$

ในสมการที่ 4.13 เทอม $(F_e - F_w)$ จะเป็นศูนย์เมื่อสมการไหลสอดคล้องกับสภาพต่อเนื่อง ดังนั้น $a_P = a_W + a_E$ จะเห็นว่าเครื่องหมายหน้าเทอม F_e เป็นลบ ถ้าหากเทอมดังกล่าวมีความเด่นชัดมากกว่าเทอม D_w โอกาสที่ a_E เป็นลบก็เป็นไปได้สูง และจะทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างเทอมของสัมประสิทธิ์กลางและสัมประสิทธิ์ข้างเคียงไม่สอดคล้องตามเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{a_p} \qquad (4.14)$$

เมื่อ

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{a_p} \le 1 \text{ สำหรับทุกจุดต่อในโดเมน}$$

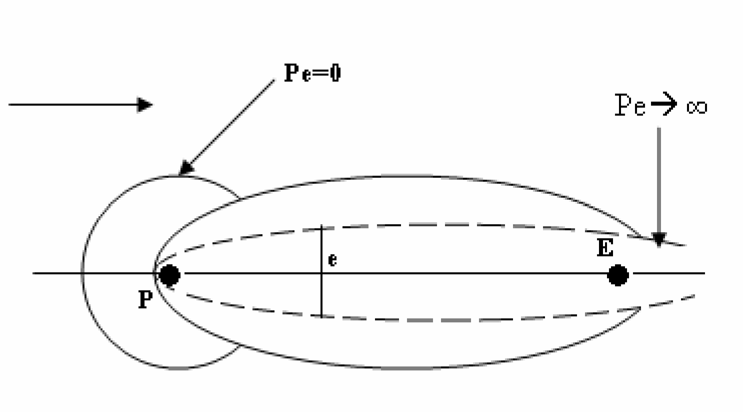
$$\frac{\sum |a_{nb}|}{a_p} < 1 \text{ อย่างน้อย 1จุดต่อในโดเมน}$$

เงื่อนไขนี้ใช้ตรวจสอบเสถียรภาพในการคำนวณ หากสัมประสิทธิ์ a_E มีค่าเป็นลบย่อมส่งผลให้เทอม $\sum |a_{nb}|$ มีค่ามากกว่า a_P และขัดแย้งกับเงื่อนไข 4.14 เป็นสาเหตุทำให้ขาดความเสถียรภาพในการคำนวณ

ความสัมพันธ์ระหว่าง F_e กับ D_e ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

$$\frac{\rho.u}{\Gamma / \delta.l} = \frac{F_e}{D_e} = Pe_e < 2 \qquad (4.15)$$

นั่นคือ Pe_e ต้องมีค่าน้อยกว่า 2 เท่านั้น เมื่อพิจารณาค่าเพคเล็ตจะพบว่ามีขนาดขึ้นกับค่าความหนาแน่น ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ ความเร็วของกระแสการไหล และขนาดของกริด ปัญหาในวิธีนี้คือการแพร่เด่นชัดมากกว่าการพาทำให้วิธีนี้มักใช้ไม่ได้ผล แต่วิธีนี้ถือเป็นวิธีที่ให้ความแม่นยำสูง



รูปที่ 4.3 การกระจายคุณสมบัติ ϕ ที่ค่าเพคเล็ตต่างๆ

4.4 วิธีผลต่างต้นกระแส (The upwind differencing scheme)

1.)เมื่อมีการไหลไปในทิศทาง + X ดังรูปที่ 4.4 จะได้ $u_w > 0, u_e > 0$ เพราะฉะนั้น $F_w > 0$ และ $F_e > 0$ ค่าคุณสมบัติทางด้านซ้ายและขวามีคุณสมบัติดังนี้

$$\phi_w = \phi_W \quad \phi_e = \phi_P \tag{4.16}$$

แทนค่าลงในสมการ 4.11 โดยไม่คิดซอสเทอม

$$\left(F_e\phi_P - F_w\phi_W\right) = D_e\left(\phi_E - \phi_P\right) - D_w\left(\phi_P - \phi_W\right) \tag{4.17}$$

จัดรูปรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\left[D_e + \left(D_w + F_w\right) + \Delta F_x\right]\phi_P = D_e\phi_E + \left(D_w + F_W\right)\phi_W \tag{4.18}$$

เขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \tag{4.19a}$$

$$a_W = D_w + F_w \tag{4.19b}$$

$$a_E = D_e \tag{4.19c}$$

$$a_P = a_W + a_E + \Delta F_x \tag{4.19e}$$

2.) กรณีการไหลในทิศ –X ดังรูปที่ 4.5 จะได้ค่า $u_w < 0, u_e < 0$ เพราะฉะนั้น $F_w < 0$ และ $F_e < 0$ ค่าคุณสมบัติทางด้านซ้ายมีคุณสมบัติดังนี้

$$\phi_w = \phi_P \tag{4.20a}$$

$$\phi_w = \phi_E \tag{4.20b}$$

แทนค่าลงในสมการ 4.11 โดยไม่คิดซอสเทอม

$$\left(F_e\phi_E - F_w\phi_P\right) = D_e\left(\phi_E - \phi_P\right) - D_w\left(\phi_P - \phi_W\right) \tag{4.21}$$

จัดรูปรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\left[D_w + \left(D_e + F_e\right) + \left(F_e - F_w\right)\right]\phi_P = D_w\phi_W + \left(D_e + F_e\right)\phi_E \tag{4.22}$$

เขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \tag{4.23a}$$

$$a_W = D_w \tag{4.23b}$$

$$a_E = D_e - F_e \tag{4.23c}$$

$$a_P = a_W + a_E + \Delta F_x \tag{4.23e}$$

ในวิธีนี้จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของสมการดิสครีไทสด์ที่ได้เป็นบวกเสมอ เทอมของ ΔF ที่รวมอยู่ในเทอมสัมประสิทธิ์กลาง a_P จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นความสัมพันธ์ของเทอมสัมประสิทธิ์จึงผ่านเงื่อนไขเสมอ แต่มีข้อเสียคือเมื่อค่าคุณสมบัติ ϕ มีค่าต่ำผลเฉลยจะลู่ออก

4.5 The hybrid differencing scheme

เนื่องจากทั้งสองวิธีข้างต้นต่างก็มีข้อเสียดังนั้นจึงได้มีวิธีนี้ขึ้น โดยพิจารณาที่เพคเล็ต โดยที่

$$Pe = \frac{\rho.u}{\Gamma / \delta.l} = \frac{F}{D} \tag{4.24}$$

โดยพิจารณาว่าเมื่อ

$|P_e| < 2$ ให้ใช้วิธีผลต่างกลาง

$|P_e| \geq 2$ ให้ใช้วิธีผลต่างต้นกระแส

เมื่อรูปสมการทั่วไปเขียนได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + \left(F_e - F_w\right) \tag{4.25}$$

โดยที่

$$a_w = \max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right] \tag{4.26a}$$

$$a_E = \max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right] \tag{4.26b}$$

จากการทดสอบพบว่าเมื่อใช้วิธี Hybrid จะให้ผลเฉลยที่ลู่เข้าไม่ว่าจะใช้ค่าคุณสมบัติ ϕ มีค่าต่ำหรือค่าสูง