บทที่ 3

การแก้ปัญหาการแพร่

The Finite Volume Method for Diffusion Problems

3.1 บทนำ

จากการศึกษาธรรมชาติของสมการการถ่ายเทของของไหลและการถ่ายเทความร้อน จะเห็นว่าวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่ดีที่สุด วิธีปริมาตรควบคุม (Finite volume method) โดยพิจารณาที่ลักษณะการส่งถ่ายความร้อนและของไหล: การแพร่อย่างเดียวในการไหลแบบคงตัว สมการการแพร่สามารถพิสูจน์ได้จากสมการการส่งถ่าย

$$\frac{\delta(\rho\phi)}{\delta t} + div.(\rho\phi.u) = div(\Gamma grad.\phi) + S_{\phi} \tag{3.1}$$

โดยที่ค่า $\frac{\delta(\rho\phi)}{\delta t} + div.(\rho\phi.u)$ ไม่นำมาคิดเพราะเป็นคุณสมบัติของการพาความร้อน ดังนั้นสมการจะเป็น

$$div(\Gamma grad.\phi) + S_{\phi} = 0 \tag{3.2}$$

3.2 การแก้สมการการแพร่ของของไหลใน 1 มิติ

จากสมการ

$$\frac{\partial(\partial\phi)}{\partial t} + div.(\rho\phi.u). = .div.(\Gamma.grad.\phi) + S_{\phi} \tag{3.3}$$

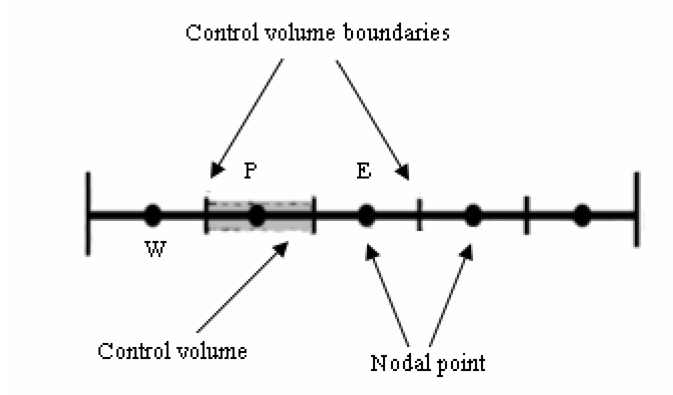
แต่ในสมการการแพร่สมการจะเหลือเพียง

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0 \tag{3.4}$$

โดยที่

$\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)$ เทอมของการแพร่

S ซอสเทอม

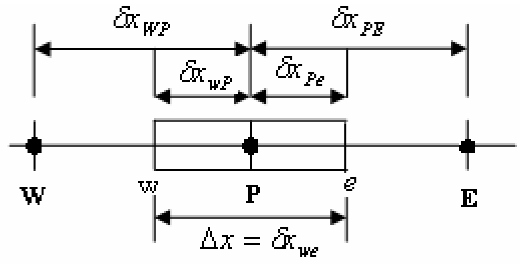


รูปที่ 3.1แสดงการแบ่งกริด

3.3 ขั้นตอนการแก้สมการการแพร่

3.3.1 ขั้นตอนที่ 1 Grid generation

ในขั้นตอนแรกนี้เราจะกำหนดขอบเขตและจำนวนกริดระหว่างขอบเขตที่กำหนดและปริมาตรควบคุมที่เราจะหาโดยเอาค่าตรงกลางโนด โดยที่ตัวอักษรใหญ่หมายถึงโนด ตัวเล็กจะหมายถึงขอบเขต ซึ่งที่โนดแต่ละโนดจะเก็บค่าตัวแปรต่างๆ ไว้ เช่น อุณหภูมิ ความเร็ว ความดัน



รูปที่ 3.2 แสดงขอบเขตของเซลล์

3.3.2 ขั้นตอนที่ 2 Discretisation

คือการทำให้เป็นสมการผลต่างโดยการอินทิเกรตและใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ของเกาส์ (Divergence theorem)

จากสมการพื้นฐานของการแพร่จะได้

$$\int_{\Delta v} \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dv + \int_{\Delta v} S.dv = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \overline{S}\Delta V = 0 \qquad (3.5)$$

โดยที่ A คือ พื้นที่หน้าตัดของขอบเขต

ΔV คือ ปริมาตร

$\overline{S}$ คือ ค่าเฉลี่ยของซอสเทอม

จากสมการที่ 3.5 เราจะเห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ของการกระจายตัว ϕ จะออกจากหน้าของขอบเขตทางด้านทิศตะวันออกและเข้าขอบเขตทางด้านทิศตะวันตกซึ่งจะเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์มวลก็คือ ทางเข้าเท่ากับทางออก

ซึ่งเราสามารถประมาณค่า Γ_W และ Γ_e ได้โดย

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2} \tag{3.6a}$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \tag{3.6b}$$

และเทอมของสัมประสิทธ์การแพร่สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{WP}}\right) \tag{3.7a}$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\delta x_{WP}}\right) \tag{3.7b}$$

ซอสเทอม(Source term) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\overline{S}\Delta V = S_u + S_P \phi_P \tag{3.8}$$

จากสมการที่ 3.5 นำสมการที่ 3.6,3.7,3.8 มาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} - S_P\right)\phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right)\phi_E + S_u \tag{3.9}$$

ซึ่งอาจเขียนได้อีกแบบเป็น

$$\left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P\right)\phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right)\phi_E + S_u \tag{3.10}$$

จากสมการที่ 3.10 เรากำหนดให้

$$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_W = a_w \tag{3.11a}$$

$$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e = a_E \tag{3.11b}$$

$$a_P = a_W + a_E - S_P \tag{3.11c}$$

ดังนั้นสมการที่ 3.10 จะได้เป็น

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \tag{3.12}$$

3.3.3 ขั้นตอนที่ 3 การแก้สมการผลต่าง (Solution of Equation)

สำหรับกระบวนการนี้เราอาจจะใช้วิธีการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ไขปัญหาก็ได้ ซึ่งรายงายเล่มนี้ได้ใช้วิธีการของเกาส์-ซอร์ดองในการแก้ไขปัญหา

3.4.ตัวอย่างการใช้งาน: One-dimensional steady state diffusion

การเคลื่อนที่ของความร้อนผ่านพื้นที่หน้าตัดโดยการแพร่เป็นการไหลแบบคงตัวและอัดตัวไม่ได้ สามารถเขียนสมการได้เป็น

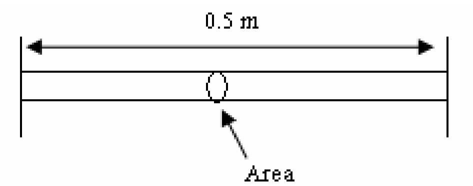
$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0 \qquad (3.13)$$

โดย k = thermal conductivity

T = อุณหภูมิ

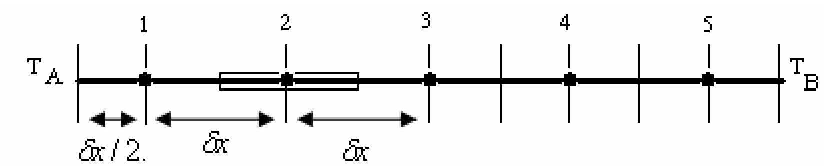
Consider the problem of source-free heat conduction in an insulated rod whose ends are maintained at constant temperature of 100 ° C and 500 ° C respectively. The one Calculate the steady state temperature distribution in the rod. Thermal conductivity k equals 100 W/m/K, Cross-sectional area A is 10×10^{-3} m^2 dimensional problem sketched in Figure 3 is governed by

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \qquad (3.14)$$



รูปที่3.3 แสดงวัสดุส่งถ่ายความร้อน

Solution แบ่งความยาวของวัสดุเป็น 5 ส่วนดังรูปที่ 3.4 จะได้ $\delta x = 0.1$ m



รูปที่ 3.4แสดงการแบ่งกริดของอุปกรณ์ส่งถ่ายความร้อน

แบ่งกริดออกเป็น 5 โนด สำหรับ โนดที่ 2,3,4 สามารถหาอุณหภูมิได้ที่ทางด้านทิศตะวันออกและทิศตะวันตกของโนด เราสามารถใช้สมการที่ 3.8 ในการเขียนขอบเขตของโนดได้ดังนี้

$$\left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{k_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)T_P=\left(\frac{k_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)T_W+\left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)T_E \qquad (3.15)$$

The thermal conductivity = $k_e = k_w = k$

ระยะห่างระหว่างโนด = δx

พื้นที่หน้าตัด =$A = A_e = A_w$

ดังนั้นทำโนดที่ 2,3,4 ให้เป็นสมการผลต่างโดยใช้สมการที่ 3.12 จะได้

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E \qquad (3.16)$$

โดยที่

$$a_w = \frac{k}{\delta x}A \qquad (3.17a)$$

$$a_E = \frac{k}{\delta x}A \qquad (3.17b)$$

$$a_P = a_W + a_E \qquad (3.17c)$$

และจากสมการที่ 3.13 ซอสเทอมมีค่าเป็นศูนย์ โนด 1 และโนด 5 เขียนสมการได้โดยการอินทิเกรตสมการที่ 3.13 เหนือโนดที่ 1 ขึ้นไปเขียนสมการได้ดังนี้

$$kA\left(\frac{T_E-T_P}{\delta x}\right)-kA\left(\frac{T_P-T_A}{\delta x/2}\right)=0 \qquad (3.18)$$

สมมุติให้ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิระหว่างโนด A และ โนด P เป็นเส้นตรงเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0.T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_A \qquad (3.19)$$

จากสมการที่ 3.19 และสมการที่ 3.10 สามารถเขียนสมการของซอสเทอมได้ดังนี้

$S=S_u+T_A S_p$ โดยที่ $S_u= (2kA/\delta x)T_A$ และ $S_P= -2kA/\delta x$ และค่า $a_w = 0$ เพราะว่าอยู่ติดขอบ และจากสมการที่ 3.15 สาเขียนเป็นสามการผลต่างได้ดังนี้

$$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + S_m \qquad (3.20)$$

โดยที่

$$a_W = 0 \tag{3.21a}$$

$$a_E = \frac{kA}{\delta x} \tag{3.21b}$$

$$a_p = a_W + a_E - S_p \tag{3.21c}$$

$$S_p = -2\frac{kA}{\delta x} \tag{3.21d}$$

$$S_u = 2\frac{kA}{\delta x}T_A \tag{3.21e}$$

จากปริมาตรควบคุมเราสามารถที่จะหาอีก 5 โนดที่เหลือจากสมการดังนี้

$$kA\left(\frac{T_B - T_p}{\delta x / 2}\right) - kA\left(\frac{T_p - T_w}{\delta x}\right) = 0 \tag{3.22}$$

เมื่อ สมมติให้มีการกระจายความร้อนระหว่างโนด P และขอบจุด B ถึงบริเวณใกล้เคียงสนามความร้อนทะลุวิ่งผ่านไปยังปริมาตรควบคุมสมการ 3.22 สามารถเขียนได้เป็น

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_p = \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W + 0.T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_B \tag{3.23}$$

จากสมการที่ 3.23 ทำเป็นสมการผลต่างคือ

$$a_pT_p = a_wT_w + a_ET_E + S_m \tag{3.24}$$

โดยที่

$$a_W = \frac{kA}{\delta x} \tag{3.25a}$$

$$a_E = 0 \tag{3.25b}$$

$$a_p = a_W + a_E - S_p \tag{3.25c}$$

$$S_p = -2\frac{kA}{\delta x} \tag{3.25d}$$

$$S_u = 2\frac{kA}{\delta x}T_B \tag{3.25e}$$

จากสมการผลต่างจากโนด 1- 5 สามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ให้ $\frac{kA}{\delta x} = 100$

จากสมการผลต่างแต่ล่ะสมการทำให้ง่ายขึ้นโดยทำเป็นตารางดังนี้

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าคุณสมบัติแต่ละโนด

Node	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	100	$200T_A$	-200	300
2	100	100	0	0	200
3	100	100	0	0	200
4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200T_B$	-200	300

เมื่อ

a_W คือ พื้นที่ผิวหน้าโนด W

a_E คือ พื้นที่ผิวหน้าโนด E

a_p คือ พื้นที่ผิวหน้าโนด P

S_p คือ ซอสเทอมโนด P

จากตารางสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$300T_1 = 100T_2 + 200T_A \tag{3.26a}$$

$$200T_2 = 100T_1 + 100T_3 \tag{3.26b}$$

$$200T_3 = 100T_2 + 100T_4 \tag{3.26c}$$

$$200T_4 = 100T_3 + 100T_5 \tag{3.26d}$$

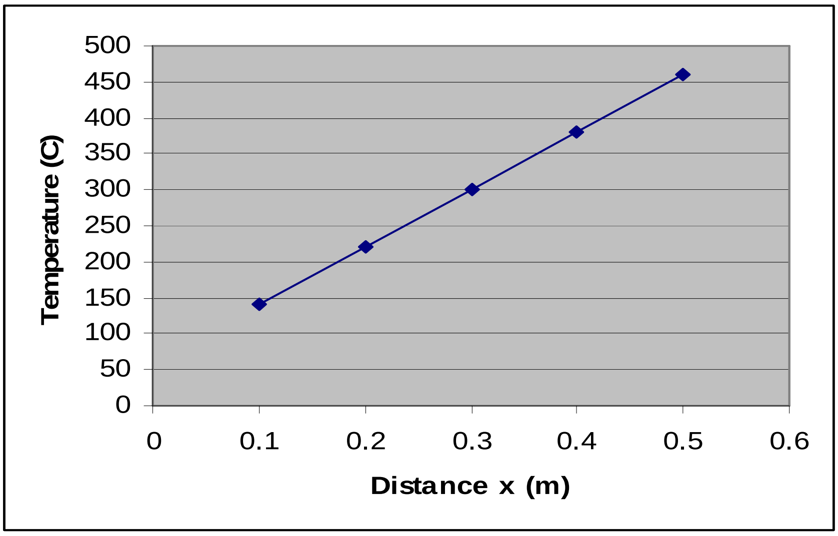
$$300T_5 = 100T_4 + 200T_B \tag{3.26e}$$

จากสมการ 3.26A-3.26e เขียนเป็นเมตริกได้ดังนี้

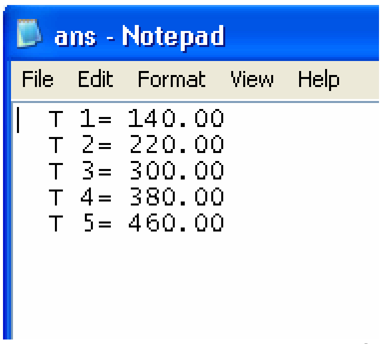
$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

จากเมตริกข้างต้นนี้สามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการแก้ไขปัญหาหรือใช้วิธีแบบแม่นตรงจะได้คำตอบและกราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีการเชิงตัวเลขกับวิธีแม่นตรง

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$



รูปที่ 3.5 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีแม่นตรงกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข



รูปที่ 3.6 ผลเฉลยจากการรันโปรแกรมที่สร้างขึ้น