บทที่2
ทบทวนวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยงข้อง

2.1 บทนำ

การกริดหลายระดับถูกคิดค้นขึ้นโดย Ferdorenko ในปี ค.ศ. 1964 โดยได้คิดค้นวิธีกริดหลายระดับที่ใช้ความสัมพันธ์แบบผลต่าง 5จุด ซึ่งได้นำไปประยุกต์แก้หาผลเฉลยของปัวส์ซอง พบว่าสามารถลดเวลาในการคำนวณลงมาก

ในปี ค.ศ.1977 Brant ได้นำเอาวิธีกการกริดหลายระดับไปใช้แก้ปัญหาผลเฉลยต่างๆอย่างได้ผล พร้อมทั้งนำเสนอวิธีการกริดหลายระดับแบบแก้ไข (multigrid correction scheme: CS), วิธีการกริดหลายระดับแบบเก็บค่าประมาณเต็ม (Full approximate storage: AS), วิธีการกริดหลายระดับแบบวัฏจักร (Cycle), วิธีการกริดหลายระดับแบบตายตัว (fixed cycle) และวิธีการกริดหลายระดับแบบปรับได้ (adaptive cycle) หลังจากนั้นวิธีการกริดหลายระดับก็ได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อใช้กับวิธีการเชิงตัวเลขแบบต่างๆ

2.2 หลักการของวิธีกริดหลายระดับ

สำหรับวิธีเชิงตัวเลขได้แก่ ไฟไนต์โวลุม(Finite volume), ไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite element) และไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference) ใช้หลักการเดียวกันคือ การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวแปรที่โนด และใช้สมการที่ได้แทนปัญหาที่จะพิจารณา ซึ่งสามารถหาได้ 2 วิธี คือ วิธีตรง (Direct method) และวิธีทำซ้ำ (Iterative method)

การทำซ้ำส่วนมากจะทำบนกริดเพียงระดับเดียว ซึ่งเราจะพบว่าการทำซ้ำไม่ว่ากรณีใดอัตราการลู่เข้าจะเป็นไปอย่างรวดเร็วใน 2-3 รอบแรก และจะช้าลงเรื่อยๆ และกริดหยาบจะกำจัดค่าความคาดเคลื่อนได้เร็วกว่ากริดละเอียด ดังนั้นเราจึงใช้วิธีกริดหลายระดับ (Multigrid method) เพื่อเร่งอัตราการลู่เข้า

2.3 การประยุกต์การกริดหลายระดับ (Multigrid method) กับปัญหาการไหล

ในปัจจุบันได้มีการพัฒนาวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาการไหลคงตัวแบบกดอัดไม่ได้ และในปัจจุบันเครื่องคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาขึ้นมากทำให้วิธีการนี้ได้รับความนิยมมากขึ้น และการใช้วิธีนี้อย่างมีประสิทธิภาพจะต้องใช้เวลาและหน่วยความจำของคอมพิเตอร์ให้น้อยที่สุด

Rubin และ Khosla ได้ศึกษาปัญหาการไหลในช่องสี่เหลี่ยม พบว่ามีอัตราการลู่เข้าดีมาก ที่ 20 -100 รอบ เมื่อเทียบกับวิธีกริดละเอียด โดยใช้เลขเรย์โนลด์จาก 100-1000 สามารถประหยัดเวลาได้ 4เท่า เมื่อเทียบกับการคำนวณบนกริดระดับเดียว

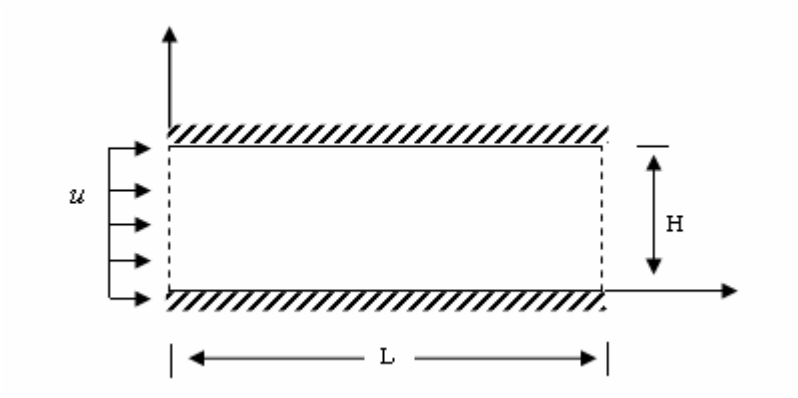
Vanka ได้อธิบายวิธีการกริดโดยอ้างอิงสมการพื้นฐานของนาเวียร์-สโตกส์ โดยใช้วิธีผลต่างต้นกระแส (Upwind-finite difference) และแก้ไขความถูกต้องโดยใช้กริดที่มีควาละเอียดมากที่สุดและใช้วิธีการกระทำซ้ำแบบ SCGS ซึ่งสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวลในทุกๆเซลล์

กระบวนการกริดหลายระดับถูกประยุกต์เข้ากับขั้นตอนวิธี SCGS ในขั้นตอนการทำงานภายนอก โดยเลือกใช้ FAS-FMG แบบวัฏจักรวี (V-cycle) ซึ่งเป็นวัฏจักรที่มีรูปแบบตายตัว ที่มีการกำหนดจำนวนรอบทำซ้ำบนแต่ละระดับกริดไว้แน่นอน การส่งผลเฉลยระหว่างกริดเป็นขั้นตอนหลักที่สำคัญของวิธีกริดหลายระดับ การประมาณค่าภายในแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear interpolation) เป็นการส่งผลเฉลยที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย โดยอาศัยหลักถ่วงน้ำหนักผลเฉลยจากจุดที่ตำแหน่งใกล้เคียงสองหรือสี่จุดมาไว้บนตำแหน่งที่ต้องการ

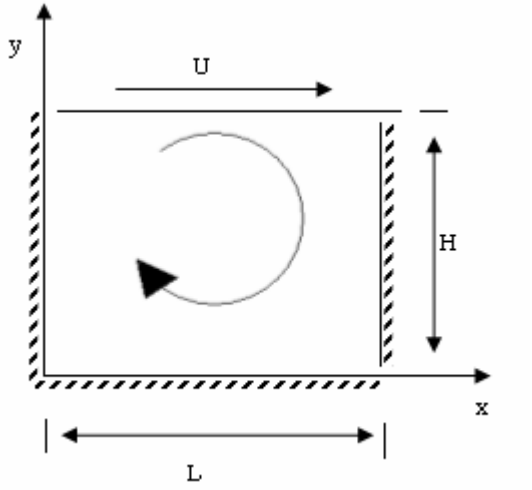
2.4 ปัญหาการทดสอบมาตรฐาน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อใช้กับปัญหาการไหลนั้นต้องได้รับการทดสอบว่ามีความถูกต้องมากน้อยเพียงใดในการคำนวณ วิธีการทดสอบคือการนำโปรแกรมไปคำนวณปัญหาการไหลแล้วนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแบบแม่นตรง สำหรับปัญหาที่ใช้ในการทดสอบเราเรียกว่า ปัญหาการทดสอบมาตรฐาน ในที่นี้จำทำการทดสอบอยู่ 3 ปัญหาคือ

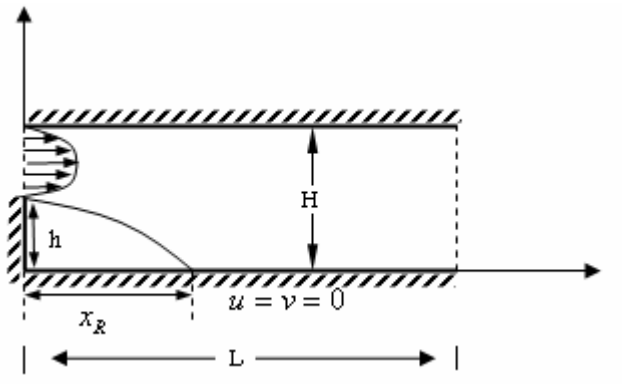
1. ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นระนาบคู่ขนาน
2. ปัญหาการไหลในช่องสี่เหลี่ยม
3. ปัญหาการไหลผ่านช่องสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวออกทันที



รูปที่ 2.1 การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน



รูปที่ 2.2 การไหลในช่องสี่เหลี่ยม



รูปที่ 2.3 การไหลผ่านช่องสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่หน้าตัดขยายตัวออกทันที