

## บทที่ 2

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานโครงการ

#### 2.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์

##### 2.1.1 อุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อน

อุณหภูมิ ( $T$ ) บ่งบอกถึงระดับพลังงานความร้อนในระบบ ส่วนฟลักซ์ความร้อน ( $q$ ) คือ อัตราการไหลของความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ที่ตั้งฉากกับการไหลของความร้อน อุณหภูมิเป็น ปริมาณสเกลาร์เพราะมีแต่ขนาดในขณะที่ฟลักซ์ความร้อนเป็นปริมาณเวกเตอร์ เพราะมีทั้งขนาด และทิศทาง ในปัญหาสองมิติที่ไม่ขึ้นกับเวลา ฟังก์ชันของอุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนจึงเขียนได้ ดังนี้

$$T = T(x, y) \quad (2.1)$$

$$\vec{q} = q_x(x, y)\hat{i} + q_y(x, y)\hat{j} \quad (2.2)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ความร้อนกับอุณหภูมิเป็นไปตามกฎของฟูเรียร์ (Fourier's law)

$$\vec{q} = -k\vec{\nabla}T \quad (2.3)$$

โดยที่ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (Gradient Operator) ในพิกัดฉากสองมิติคือ

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} \quad (2.4)$$

ดังนั้น

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.5)$$

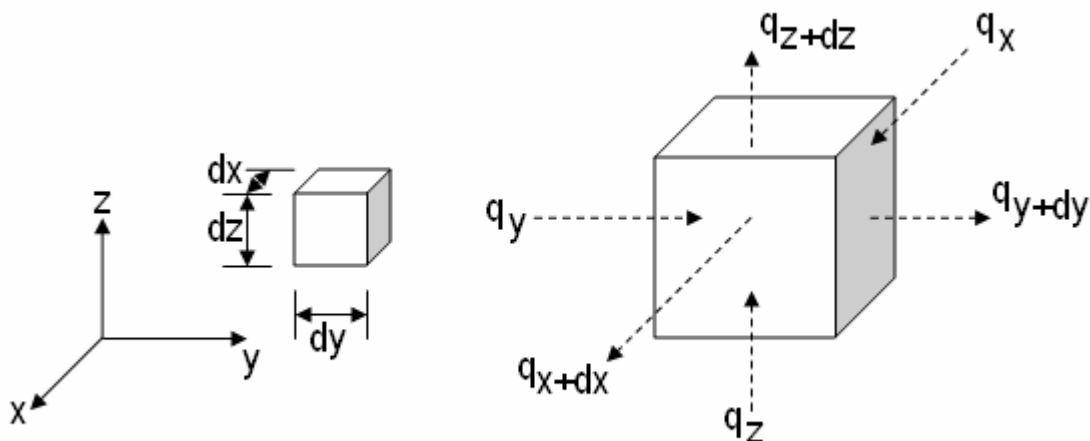
$$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.6)$$

$k$  ในสมการข้างต้นคือ ค่าการนำความร้อน (Thermal Conductivity) ซึ่งเป็นสมบัติทางกายภาพของวัสดุในระบบ เครื่องหมายลบในสมการกฎของฟูเรียร์เป็นผลมาจากการที่ความร้อนจะต้องไหลมาจากอุณหภูมิสูงมาอุณหภูมิต่ำคือ ไหลสวนทางกับทิศทางการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิ

สิ่งหนึ่งที่ที่น่าสนใจเกี่ยวกับความร้อนคือ ทิศทางการไหลของมันเป็นตั้งฉากกับอุณหภูมิคงที่ (Isotherm) ดังนั้น ถ้าทราบการกระจายตัวอุณหภูมิในสองมิติก็จะสามารถเขียนเส้นอุณหภูมิคงที่และเส้นฟลักซ์ความร้อน (Heat Flux Line) ได้ พร้อมทั้งสามารถบอกถึงทิศทางการไหลของความร้อนได้ด้วย เป็นที่น่าสังเกตว่าการไหลของความร้อนเปรียบเสมือนการไหลของน้ำโดยมีความร้อนเป็นน้ำ อุณหภูมิเป็นระดับน้ำ และเส้นฟลักซ์ความร้อนเป็นผนังของช่องทางไหล การที่น้ำไม่อาจไหลผ่านผนังก็เหมือนกับการที่ความร้อนไม่อาจไหลตัดกับเส้นฟลักซ์ความร้อน

จากการที่ความร้อนขึ้นอยู่กับตำแหน่งและทิศทาง ทำให้ค่าการนำความร้อนอาจขึ้นกับตำแหน่งและทิศทางตามไปด้วย วัสดุไม่เอกพันธ์ (Non-homogeneous) จะมีค่า  $k$  ที่ขึ้นกับตำแหน่ง ในวัสดุ ส่วนวัสดุแอนไอโซทรอปิก (Anisotropic) มีค่า  $k$  ที่ไม่เท่ากันที่ตำแหน่งเดียวกัน โดยขึ้นกับทิศทางการไหลของความร้อน

### 2.1.2 สมการการนำความร้อนสถานะอยู่ตัว (Steady State Equations)



รูปที่ 2.1 ปริมาตรควบคุมสำหรับการวิเคราะห์การนำความร้อนในวัตถุสามมิติ

ในการกระจายอุณหภูมิในวัตถุสามมิติในรูปที่ 2.1 จะเริ่มต้นจากการพิจารณาปริมาตรควบคุมขนาด  $dx \times dy \times dz$  ในวัตถุ เส้นประที่มีลูกศรทั้ง 6 เส้นในรูปชี้แทนฟลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้าออกที่ 6 ด้านของปริมาตรควบคุม ตัวห้อยหมายถึงตำแหน่งของฟลักซ์ความร้อน ถ้ามีความร้อนกำเนิดภายในวัตถุในอัตรา  $f(x, y, z)$  ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร หลักการสมดุลพลังงานที่สภาวะอยู่ตัวกำหนดเอาไว้ว่าอัตราการไหลเข้าของความร้อนต้องเท่ากับผลบวกของอัตราการไหลออกของความร้อนและอัตราการผลิตความร้อน

$$q_x dydz + q_y dx dz + q_z dx dy + f(x, y, z) dx dy dz = q_{x+dx} dydz + q_{y+dy} dx dz + q_{z+dz} dx dy \quad (2.7)$$

$q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$  เขียนเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ได้ดังนี้

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.8)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.9)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.10)$$

พจน์อันดับมากกว่าหนึ่งในสมการที่ (2.8) - (2.10) ถูกตัดทิ้งไปเนื่องจากมันมีค่าน้อยมากเมื่อ  $dx, dy, dz$  มีขนาดน้อยเป็นกณิกนันต์ รวมสมการที่ (2.7) - (2.10) ทำให้ได้สมการใหม่คือ

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - f(x, y, z) = 0 \quad (2.11)$$

จากนั้นใช้กฎของฟูเรียร์เขียนฟลักซ์ความร้อนให้อยู่ในรูปของอุณหภูมิ ก็จะได้สมการการนำความร้อนอยู่ตัว

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{f(x, y, z)}{k} = 0$$

$$\nabla^2 T + \frac{f(x, y, z)}{k} = 0 \quad (2.12)$$

ผลเฉลยของสมการที่ (2.12) คืออุณหภูมิ  $T(x, y, z)$  ณ ตำแหน่งใดๆ ในโดเมนและบนขอบเขต ซึ่งสามารถใช้คำนวณหาฟลักซ์ความร้อนโดยใช้กฎของฟูเรียร์ ในกรณีที่ไม่มีการกำเนิดความร้อน สมการที่ (2.12) จะกลายเป็น

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.13)$$

ซึ่งก็คือสมการลาปลาซ ถึงแม้ว่าสมการที่ (2.13) ได้มาจากการวิเคราะห์ปัญหาสามมิติ แต่สมการนี้สามารถใช้กับปัญหาสองมิติได้ด้วย โดย  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  สำหรับปัญหาสองมิติ

### 2.1.3 สมการการนำความร้อนสถานะไม่อยู่ตัว (Unsteady State Equations)

#### 1. สมการเบื้องต้น (Basic Equations) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\nabla \cdot (k \nabla \phi) = c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.14)$$

$\phi$  คือ ฟังก์ชันของอุณหภูมิ,  $c$  คือ ความร้อนจำเพาะ และ  $k$  คือ ค่าการนำความร้อน เราสมมติให้ค่าการนำความร้อนนั้นจะเปลี่ยนแปลงตามเลขยกกำลังในพิกัดคาร์ทีเซียน เช่น

$$k(x, y, z) = k_0 e^{2\beta z} \quad (2.15)$$

ในขณะที่  $\beta$  คือ ตัวแปรที่ไม่เป็นเอกพันธ์ ความร้อนจำเพาะนั้นจะมีลำดับเหมือนกับ การเปลี่ยนแปลงเบื้องต้นของค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

$$C(x, y, z) = C_0 e^{2\beta z} \quad (2.16)$$

แทนค่าที่ได้เหล่านี้ในสมการที่ (2.14) ซึ่งจะได้

$$\nabla^2 \phi + 2\beta \phi_z = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.15)$$

$\alpha = k_0/c_0$  และ  $\phi_z$  แสดงให้เห็นถึงอนุพันธ์ของ  $\phi$  ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ  $z$  (เช่น  $\phi_z \equiv \partial\phi/\partial z$ ) เงื่อนไขขอบเขตทั้งสองชนิดนั้นต่างก็ถูกแนะนำมาใช้ ในเงื่อนไขดริชเลตสำหรับค่า  $\phi$  ที่ไม่ทราบคือ

$$\phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, z; 1) \quad (2.16)$$

ขอบเขตของ  $\Sigma_1$  และ เงื่อนไขของมัน ที่การเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องของตัวมันเองคือ

$$q(x, y, z; t) = -k(\bullet) \frac{\partial\phi(x, y, z; t)}{\partial n} = \bar{q}(x, y, z; t) \quad (2.17)$$

บนขอบเขตของ  $\Sigma_2$  เมื่อ  $n$  เป็นค่าที่มองเห็นได้ปกติ สำหรับปัญหาที่พบบ่อย  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$  ซึ่ง  $\Sigma$  คือขอบเขตทั้งหมด จากปัญหาที่เป็น Time Dependent จะมีผลต่อเงื่อนไขขอบเขตเหล่านี้ เงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลาจำเพาะ  $t_0$  นั้นจะต้องถูกกำหนดให้ใช้ด้วย นอกจากนี้ผู้ทบทวนเริ่มต้นที่ศูนย์นั้นจะนำมาพิจารณาในตัวอย่างต่าง ๆ เช่น

$$\phi(x, y, z; t_0) = \phi(x, y, z) = 0 \quad (2.18)$$

## 2. Green's Function กรีนฟังก์ชัน

กรีนฟังก์ชันสำหรับสมการที่ (2.15) นั้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้โดยใช้การแทนที่

$$\phi = e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t} u \quad (2.19)$$

ดังนั้น การสมการที่แปลงในสมการที่ (2.15) สามารถแสดงโดยการใช้อย่างนี้

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\beta e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t} u + e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \beta^2 e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t} u - 2\beta e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t} \frac{\partial u}{\partial z} + e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} (-\beta^2 \alpha e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t}) u - \frac{e^{-\beta z - \beta^2 \alpha t}}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.22)$$

แทนค่า สมการที่ (2.20), (2.21) และ (2.22) ในสมการที่ (2.15) จะได้

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.23)$$

ซึ่งก็คือสมการการกระจายแบบปกติ (Standard Diffusion Equation) สำหรับปัญหาวัสดุเนื้อเดียวกัน คำตอบเบื้องต้นของ Time Dependent สำหรับสมการนี้สามารถหาได้โดย

$$u^* = \frac{1}{(4\pi\alpha\tau)^{3/2}} e^{-(r^2/4\alpha\tau)} \quad (2.24)$$

ซึ่ง  $\tau = t_f - t$ . และให้จำไว้ว่า ฟังก์ชัน  $u$  นั้นเป็นค่าแทน Temperature Field ที่เวลา  $t_f$  ซึ่งเกิดจาก แหล่งความร้อนที่เกิดขึ้นทันทีที่จุด  $P(x_p, y_p, z_p)$  และเวลา  $t$  นอกจากนี้คำตอบพื้นฐาน 3 มิติ สำหรับสมการการแพร่กระจายแบบ FGM สามารถเขียนโดยแทนในสมการที่ (2.19) ได้ดังนี้

$$\phi^* = \frac{1}{(4\pi\alpha\tau)^{3/2}} e^{-\beta(z-z_p) - \beta^2\alpha\tau - (r^2/4\alpha\tau)} \quad (2.25)$$

### 3. การแปลงลาปลาซ สูตรวิธีบานด์รีเอลิเมนต์ (Laplace Transform BEM

#### Formulation)

LT (Laplace Transform) ของ  $\phi$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\bar{\phi}(Q,s) = \int_R \phi(Q,t) e^{-st} dt \quad (2.26)$$

ดังนั้น ระยะเวลา LT ในสมการที่ (2.15) จะกลายเป็น

$$\nabla^2 \bar{\phi} + 2\beta \bar{\phi}_z - \frac{s}{\alpha} \bar{\phi} = 0 \quad (2.27)$$

เมื่อ  $\phi = 0$  (ที่  $t=0$ ) จะถูกนำมาพิจารณา (ดูสมการที่ 2.18)

ขอบเขตของ Integral ที่มีลักษณะเดียวกันสามารถใช้ได้โดย “Orthogonal Zing” ซึ่งสมการนี้จะขัดแย้งกับ Arbitrary Function (สำหรับตอนนี้)  $f(x, y, z) = f(Q)$  ตัวอย่าง เช่น การอินทิเกรตที่สูงกว่าขอบเขตของค่า  $V$

$$\int_V f(Q)(\nabla^2 \bar{\phi} + 2\beta \bar{\phi}_z - \frac{s}{\alpha} \phi) dV_Q = 0 \quad (2.28)$$

ตามที่ Green ได้ระบุไว้ว่า ถ้าฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน คือ  $\phi$  และ  $\lambda$  มีกระจายครั้งที่ 1 และ 2 อย่างต่อเนื่องใน  $V$  จะได้

$$\int_V (\phi \nabla^2 \lambda - \lambda \nabla^2 \phi) dV = \int_{\Sigma} (\phi \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS \quad (2.29)$$

การใช้ความสัมพันธ์และข้อจำกัดของขอบเขตของ  $V$  โดย  $\Sigma$  สิ่งแรกที่เกิดขึ้นในสมการที่ (2.28) จะกลายเป็น

$$\int_V f(Q) \nabla^2 \phi dV_Q = \int_V \phi(Q) \nabla^2 f(Q) dV_Q + \int_{\Sigma} (f(Q) \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial f(Q)}{\partial n}) dS_Q \quad (2.30)$$

อินทิเกรตครั้งที่ 2 ของสมการที่ (2.28) เราจะได้

$$\int_V 2\beta f(Q) \phi_z dV_Q = \int_{\Sigma} 2\beta f(Q) n_z \phi(Q) dS_Q - \int_V 2\beta \frac{\partial f}{\partial z} \phi(Q) dV_Q \quad (2.31)$$

และใช้สมการที่ (2.30) และ (2.31) แทนในสมการที่ (2.28) สุดท้ายเราจะได้สมการที่ไม่ซับซ้อนมากดังนี้

$$0 = \int_{\Sigma} \left( f(Q) \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial f(Q)}{\partial n} + 2\beta n_z(Q) \phi(Q) f(Q) \right) dS_Q \quad (2.32)$$

$$+ \int_V \phi(Q) \left( \nabla^2 f(Q) - 2\beta f_z(Q) - \frac{s}{\alpha} f(Q) \right) dV_Q$$

$f_z = \partial f / \partial z$  และ  $n(Q) = (n_x, n_y, n_z)$  คือ Unit Outward Normal ของ  $\Sigma$   
ถ้าเราเลือก  $f(Q) = G(P, Q)$  ดังในฟังก์ชันกรีนนั้น จะทำให้ได้สมการ

$$\nabla^2 G(P, Q) - 2\beta G_z(Q) - \frac{s}{\alpha} G(P, Q) = -\delta(Q - P) \quad (2.33)$$

$\delta$  คือ ฟังก์ชัน Dirac Delta ดังนั้นที่มาของ Volume Integral ใน สมการที่ (2.32) จะกลายเป็น  $\phi(P)$  โดย นำสมการที่ (2.33) และ (2.32) มาเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\phi(P) + \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) - 2\beta n_z G(P, Q) \right) \phi(Q) dS_Q = \int_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial}{\partial n} \phi(Q) dS_Q \quad (2.34)$$

ในขณะที่ต้องการแทนค่ากรีนฟังก์ชันใน LT สมการที่ (2.33) จะสามารถแก้ไขโดยการแทนค่าและจะกลายเป็น

$$G = e^{\beta z} v \quad (2.35)$$

ในขณะที่ต้องการแทนค่ากรีนฟังก์ชันใน ระยะ LT สมการที่ (2.22) จะสามารถแก้ไขโดยการแทนค่าและจะกลายเป็น

$$\nabla^2 v - \left( \beta^2 + \frac{s}{\alpha} \right) v = 0 \quad (2.36)$$

ในกรณีนี้สมการความแตกต่างสำหรับระยะ LT คือ

$$v = \frac{1}{4\pi r} e^{-\sqrt{\beta^2 + (s/\alpha)} r} \quad (2.37)$$

โดยการแทนค่าครั้งหลังสุด (ดูสมการที่ 2.35) เราจะได้

$$G(P, Q, s) = \frac{1}{4\pi r} e^{\beta z} e^{-\sqrt{\beta^2 + (s/\alpha)} r} \quad (2.38)$$



เงื่อนไขขอบเขตของสมการนั้นต้องสามารถเปลี่ยนแปลงไปสู่ระยะ LT ได้เช่น

$$\tilde{\phi}(Q.s) = \int_R \bar{\phi}(Q.t) e^{-st} dt, \tilde{q}(Q.s) = \int_R \bar{q}(Q.t) e^{-st} dt \quad (2.39)$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง สมการด้านบนจะถูกรีดิวซ์ เป็น

$$\tilde{\phi}(Q.s) = \frac{\bar{\phi}(Q.s)}{s}, \tilde{q}(Q.s) = \frac{\bar{q}(Q.t)}{s} \quad (2.40)$$

ฟังก์ชันเคอร์เนล ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลง Laplaces คือ

$$G(P.Q.s) = \frac{1}{4\pi r} e^{\beta(zq-zp) - \sqrt{\beta^2 + (s/\alpha)\tau}} \quad (2.41)$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} G(P.Q.s) - 2\beta n_z G(P.Q.s) &= \frac{e^{\beta R_z - \sqrt{\beta^2 + (s/\tau)\tau}}}{4\pi} \\ &\times \left( -\frac{1}{r^2} \frac{n.R}{r} - \frac{1}{r} \sqrt{\beta^2 + \frac{s}{\alpha} \frac{n.R}{r} + \frac{1}{r} \beta n_z - \frac{2\beta n_z}{r}} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

หรือ

$$\frac{\partial}{\partial n} G(P.Q.s) - 2\beta n_z G(P.Q.s) = \frac{e^{\beta R_z - \sqrt{\beta^2 + (s/\tau)\tau}}}{4\pi} \left( \frac{n.R}{r^3} + \sqrt{\beta^2 + \frac{s}{\alpha} \frac{n.R}{r^2} + \frac{\beta n_z}{r}} \right) \quad (2.43)$$

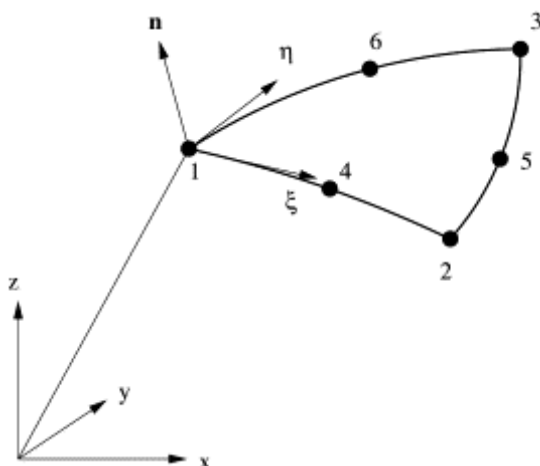
$N$  คือ Unit Outward Normal ที่จุด  $Q$ ,  $n_z$  คือ  $z$  คอมโพเนนตของ  $n$ ,  $R = Q-P$ ,  $R_z = z_Q - z_P$  และ  $r$  คือ ค่าบวกของ  $R$  เช่น  $r = \|R\| = \|Q - P\|$

#### 4. Numerical implementation of the 3D Galerkin BEM

วิธีการเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานชิ้นนี้คือ เทคนิค Galerkin โดยจะเชื่อมโยงกับวิธีการ LT บางส่วนของวิธีการทางคณิตศาสตร์จะถูกสรุปในบทนี้

##### 4.1 Division of The Boundary Into Element

โดเมนที่เป็นคำตอบพื้นฐานนั้นจะถูกแบ่งออกเป็นตัวเลขต่างๆที่เชื่อมโยงกัน องค์ประกอบแต่ละตัวเป็นการเปลี่ยนแปลงของเลขาคณิตและการแปรผันตามเทียบเคียงโดยฟังก์ชันง่ายๆ ในการวิจัยฉบับนี้สมการพีชคณิตแบบสามเหลี่ยม แบบหกจุดจะถูกใช้ (ดูรูปที่ 2.2)



รูปที่ 2.2 Isoparametric quadratic triangular element of 6 nodes. The intrinsic coordinate space is the right triangle in  $(\xi, \eta)$  space with  $\xi \geq 0, \eta \geq 0$  and  $\xi + \eta \leq 1$ .

เรขาคณิตขององค์ประกอบนี้สามารถกำหนดได้โดยการลากจุดทั้งหกจุดโดยใช้รูปทรงเรขาคณิตที่เหมาะสมดังจะได้สมการต่อไปนี้

$$x_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 N_j(\xi, \eta)(x_i)_j \quad (2.44)$$

ในรูปจำลอง Isoparametric ฟังก์ชันของรูปทรงเดิมจะถูกเขียนเพื่อใช้หาคำตอบที่เปลี่ยนไปดังนี้

$$\phi_i(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 N_j(\xi, \eta)(\phi_i)_j \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 N_j(\xi, \eta) \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) \quad (2.45)$$

นอกจากนี้ฟังก์ชันของรูปทรงสามารถเขียนให้ชัดเจนได้ในรูปแบบการเชื่อมโยงของ  $\eta$  และ  $\xi$  ดังสมการต่อไปนี้ (ดูรูปที่ 2.2)

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), N_2(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1), N_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1), \\ N_4(\xi, \eta) &= 4\xi(1 - \xi - \eta), N_5(\xi, \eta) = 4\xi\eta, N_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{aligned} \quad (2.46)$$

ระยะการประสานคือสามเหลี่ยมมุมฉากที่  $\xi \geq 0, \eta \geq 0$  และ  $\xi + \eta \leq 1$

#### 4.2 สมการขอบเขตอินทิเกรต Galerkin

นิยาม

$$B(P) \equiv \phi(P) + \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) - 2\beta n_z G(P, Q) \right) \phi(Q) dS_Q - \int_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n} (Q) dS_Q \quad (2.47)$$

ดังนั้นสำหรับคำตอบที่แท้จริง  $B(P) = 0$

ความผิดพลาดในคำตอบที่ใกล้เคียงนั้นจะขัดแย้งกับฟังก์ชันรูปร่าง เช่น ฟังก์ชันรูปร่างนั้นจะเป็นฟังก์ชันหนักและ  $B(P) = 0$  เป็นลักษณะที่แสดงให้เห็นว่าเป็นฟังก์ชันเบา

$$\int_{\Sigma} N_k(P) B(P) dP = 0 \quad (2.48)$$

หลังจากแทนที่ขอบเขตและฟังก์ชันขอบเขตด้วยค่าที่ใกล้เคียง สมการพีชคณิตแบบเส้นจะกลายเป็น

$$[H] \{\phi\} = [G] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} \quad (2.49)$$

ในการรวมกันขององค์ประกอบทางเมตริก การอินทิเกรตแบบเดียวจะก่อให้เกิดค่าที่แตกต่างกัน สำหรับ Galerkin มีคำตอบสามชนิดที่จะต้องนำมาพิจารณาในกรณีนี้การรวมกันของตัวเลขและการวิเคราะห์อินทิเกรตถูกนำมาใช้โดยการวิเคราะห์การอินทิเกรต โดยขึ้นอยู่กับค่าที่มีการเปลี่ยนแปลงซึ่งเทคนิคนี้ จะนำไปสู่กระบวนการ Two-dimensional

## 5. Numerical inversion of The Laplace Transform

ใน LT BEM Approach ตัวเลขจะแปรผกผันกับ LT เทคนิค LT สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับวิธีการเชิงคณิตศาสตร์ที่ต่างกันอย่างเช่น ความแตกต่างจำนวนจำกัดและวิธีการสำหรับหาคำตอบของการไหลของน้ำและแก้ปัญหาในการขนส่งและปัญหาในการควบคุมความร้อน Laplace Inversion Algorithm แบบต่างๆ ข้อดีและข้อเสียของ Algorithm บางตัวถูกแสดงให้เห็นโดย เมลเลต ดาวิ และมาร์ติน ได้ศึกษาเชิงวิพากษ์ใน Algorithm อื่นๆ อีกหลายตัว หลังจากนั้นดาฟฟ์ได้ศึกษาวิธีการที่นิยมใช้กัน 3 วิธีสำหรับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้การแปรผกผันตาม Laplace Transform เช่น การอินทิเกรตโดยตรง วิธีการของวิก และ วิธีการของ Talbot

การแปรผกผัน LT นั้นเป็นปัญหาที่ยากจะแก้ไขอย่างไรก็ตามความผิดพลาดเล็กน้อยสามารถแก้ไขได้โดยกระบวนการการอินเวิร์ด ซึ่งจะนำไปสู่ผลทางคณิตศาสตร์แบบง่าย ๆ ในช่วงเวลาที่ผ่านไปไม่นานนี้ Moridis และ Reddle แสดงให้เห็นว่า Algorithm ของ Stehfest นั้นไม่มีปัญหาสำหรับการจัดลำดับชั้นอย่างละเอียด อีกทั้ง Zhu และ Satravaha ยังได้รับความสำเร็จที่คล้าย ๆ กันในการใช้การวิเคราะห์ตัวเลขเชิงแปรผกผัน ของ LT ใน BEM และเร็วๆ นี้ Moridis ได้วิจารณ์ว่า Algorithm ของ Stehfest นั้นแสดงให้เห็นจุดเสียและจุดดี สำหรับการศึกษานี้ในปัจจุบัน ได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้เขียน Code ของ Algorithm ของ Stehfest

Algorithm ของ Stehfest นั้นได้แปรมาจาก Gaver ถ้า  $P(s)$  คือ LT ของ  $F(t)$  และ ค่าใกล้เคียงของ  $F_a$  ของ Inverse  $F(t)$  คือ ช่วงเวลาจำเพาะ  $t = T$  ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

$$F_a = \frac{\ln 2}{T} \sum_{i=1}^N V_i \tilde{P}\left(\frac{\ln 2}{T} i\right) \quad (2.50)$$

เมื่อ

$$V_i = (-1)^{N/2+1} \sum_{k=(i+1)/2}^{\min(i,N,2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2/k)! k! (k-1)! (2k-i)!} \quad (2.51)$$

สมการที่ (2.50) และ (2.51) นั้นจะเกี่ยวข้องกันสู่สมการรูปแบบสุดท้ายที่ใช้ในงานวิจัยฉบับนี้

เมื่อ Invert ฟังก์ชันจาก LT จะได้ค่า  $n$  ที่แตกต่างกัน และจะทำให้ฟังก์ชันนั้นเรียบง่ายขึ้น Stehfest เสนอว่า  $N = 10$  สำหรับ Arithmetic หลังจากนั้น Moridis พบว่าการเปลี่ยนแปลงที่สำคัญทำให้ค่า  $N$  เปลี่ยนไป โดย  $6 \leq N \leq 10$  ในปัจจุบันเครื่องคิดเลขต่าง ๆ ต่างก็ใช้  $N = 10$

วิธีการเชิงคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ที่นำมาใช้สำหรับการ Invers ของ LT ที่ต้องการนั้น จะต้องมีการหาค่า LT ได้อย่างละเอียด

เทคนิคแบบที่ 2 ของ LT นั้นถูกพัฒนาเมื่อเร็ว ๆ มา นี้ โดย Murli ซึ่งนี่ก็เป็นหนึ่งใน กลุ่มวิธีแบบ Fourier ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ สูตรการอินเวิร์สของ Riemann โดยการใช้ กฎ Trapezoidal โดย  $h = \pi/T$

$$F_N(t) = \frac{e^{\sigma t}}{T} \operatorname{Re} \left( \frac{F(\sigma)}{2} + \sum_{i=1}^N F \left( \sigma + \frac{ik\pi}{T} \right) e^{ik\pi t/T} \right) \quad (2.52)$$

เปรียบเทียบกับ Algorithm ของ Stehfest พบว่าวิธีการนี้นั้นต้องการรูปแบบเส้นขนาน มาบรรจบกัน และยังต้องการวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าผลการศึกษานั้น จะใช้วิธีการ Algorithm ของ Stehfest