บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานโครงงาน

2.1 สมการพลังงานพื้นฐานในการไหลแบบคงตัว

สมการพลังงานมีพื้นฐานมาจากกฎข้อที่หนึ่งของวิชาอุณหภูมิพลศาสตร์ ซึ่งกล่าวว่า สำหรับการไหลแบบคงตัวงานที่ได้รับจากระบบรวมกับพลังงานความร้อนที่ถ่ายเทเข้าสู่หรือออกจากระบบ จะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานของระบบนั้น นั่นคือ

$$Work + Heat = \Delta Energy \qquad \dots (2.1)$$

โดยที่งาน (Work) ความร้อน (Heat) และพลังงาน (Energy) จะต้องอยู่ในหน่วยเดียวกัน จึงจะสามารถถ่ายเทระหว่างกันได้ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม

ภายในช่วงเวลา dt น้ำหนักของของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านหน้าตัด 1 คือ $\gamma_1 \; A_1 \; ds_1$ และสำหรับการไหลแบบคงตัวน้ำหนักของของไหลนี้จะเท่ากับที่เคลื่อนที่ออกจากหน้าตัด 2 ภายในช่วงเวลาเดียวกัน ดังนั้น ΔE_{in} ที่เคลื่อนที่เข้าสู่หน้าตัด 1 ภายในช่วงเวลา dt คือ $\gamma_1 A_1 ds_1 (z^2 + v_1{}^2 / 2g + I_1)$ โดยที่ $\gamma_1 \; A_1 \; ds_1 \;\; z_1$ คือพลังงานศักย์ของของไหล และ $\gamma_1 \; A_1 \; ds_1 \, (v_1{}^2 / 2g)$ คือพลังงานจลน์ของของไหล ส่วน I_1 คือพลังงานภายใน (Internal Energy) ที่อยู่ในรูปของอุณหภูมิของของไหลที่หน้าตัด 1และพลังงานที่เคลื่อนออกจากหน้าตัด 2 (ΔE_{out}) จะอยู่ในรูปแบบเดียวกัน จึงสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปของสมดุลพลังงานได้ดังนี้

$$\Delta E = \gamma_2 A_2 ds_2 (z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + I_2) - \gamma_1 A_1 ds_1 (z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + I_1) \qquad \dots (2.2)$$

เมื่อประยุกต์กฎข้อที่หนึ่งของวิชาอุณหพลศาสตร์ดังสมการที่ (2.1) เข้ากับสมการที่ (2.2) แล้วจัดรูปใหม่ โดยที่ $\gamma_1 A_1 ds_1 = \gamma_2 A_2 ds_2$ ตามหลักการของการไหลแบบคงตัว จะได้

$$\frac{P_1}{\gamma_1} - \frac{P_2}{\gamma_2} + h_M + Q_H = \left(z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + I_2 \right) - \left(z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + I_1 \right) \qquad \dots (2.3)$$

จัดสมการใหม่ได้ในรูปของ

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{v_1^2}{2g} + I_1\right) + h_M + Q_H = \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma_2} + \frac{v_2^2}{2g} + I_2\right) \qquad \text{... (2.4)}$$

สมการที่ (2.4) สามารถประยุกต์ใช้ได้กับทั้ง ของเหลว แก๊ส ไอ ของไหลสมมุติ และของไหลจริง ภายใต้การไหลแบบคงตัว ค่าของ P/γ คือพลังงานต่อหน่วยน้ำหนักของของไหลที่มีอยู่เนื่องมาจากความดัน เมื่ออยู่ภายใต้สภาวะทั่วๆ ไป พลังงานจำนวนนี้จะเปลี่ยนรูปไปเป็นพลังงานชนิดอื่น เช่น พลังงานจลน์ พลังงานศักย์ หรือพลังงานภายใน ในทำนองกลับกันพลังงานประเภทดังกล่าวเหล่านี้อาจจะเปลี่ยนมาเป็นพลังงานความดันได้

2.2 สมการของเบอร์นูลลี่ (Bernoulli' Equation)

ในทางปฏิบัติ เมื่อของเหลวและแก๊สหรือไอ อยู่ภายใต้สภาวะที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงความดันหรือมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย อาจถือได้ว่าเป็นของไหลที่กดอัดไม่ได้ กล่าวคือมีค่าความหนาแน่นและน้ำหนักจำเพาะคงที่ เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.4) สำหรับของไหลที่กดอัดไม่ได้ อาจจัดรูปสมการได้ใหม่เป็น

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right) + h_M + Q_H = \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \right) + (I_2 + I_1) \qquad \text{... (2.5)}$$

ถ้าหากไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างระบบกับภายนอก ผลจากความเสียดทานจะทำให้อุณหภูมิภายในระบบเพิ่มขึ้นทำให้ I_2 มีค่ามากกว่า I_1 แต่ถ้ามีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้น การเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายในจะเกิดควบคู่ไปกับการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ซึ่งมีค่าเท่ากับปริมาณความร้อนที่ภายนอกถ่ายเทเข้าสู่ระบบหรือจากระบบออกสู่ภายนอก รวมกับความร้อนที่เกิดจากความเสียดทานของไหล ดังนั้น

$$\frac{\Delta Interma\_energy}{Unit\_of\_mass} = \Delta i = i_2 - i_1 = c(T_2 - T_1)$$

$$\frac{\Delta Interma\_energy}{Unit\_of\_weight} = \Delta I = \frac{\Delta i}{g}$$
$$= I_2 - I_1$$
$$= (c/g)(T_2 - T_1)$$
$$= Q_H + h_L \qquad \text{… (2.6)}$$

โดยที่ c คือค่าความร้อนจำเพาะ (Specific Heat) ของของไหล เช่นความร้อนจำเพาะของน้ำมีค่าเท่ากับ 4187 N.m/kg.K หรือ 25000 ft-lb/slug.R เป็นต้น และ T คืออุณหภูมิสัมบูรณ์ ถ้าให้ h_L แทนการสูญเสียพลังงานเนื่องจากความเสียดทานของของไหลต่อหน่วยน้ำหนัก จะได้

$$h_L = (I_2 - I_1) - Q_H = \frac{c}{g}(T_2 - T_1) - Q_H \qquad \text{… (2.7)}$$

ถ้าหากการสูญเสียความร้อน (ค่า Q_H เป็น -) มีค่ามากกว่า h_L จะทำให้ T_2 น้อยกว่า T_1 แต่ถ้ามีการรับความร้อนจากภายนอกเข้ามา (ค่า Q_H เป็น +) T_2 จะมากกว่าค่าที่เกิดจากความเสียนดทานเพียงอย่างเดียว และถ้ามีการถ่ายเทความร้อนเพียงเล็กน้อยอาจกล่าวได้ว่าเป็นการไหลแบบความร้อนคงตัว (Isothermal Flow)

ในกรณีที่ไม่มีเครื่องจักรกลอยู่ระหว่างหน้าตัดที่ 1 และ 2 และไม่มีการถ่ายเทความร้อน เมื่อแทนค่าในสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.5) จะได้

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right) = \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \right) + h_L \qquad \text{... (2.8)}$$

โดยที่ h_L หมายถึงการสูญเสียเฮด (Head Loss) แทนการสูญเสียพลังงานต่อหน่วยน้ำหนักของของไหลในบางกรณีที่การสูญเสีย h_L มีค่าเพียงเล็กน้อยก็อาจไม่ต้องนำมาพิจารณาได้ สมการที่ (2.8) จึงเป็น

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right) = \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \right) \qquad \text{... (2.9)}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \text{ค่าคงที่} \qquad \text{... (2.10)}$$

สมการที่ (2.9) และ (2.10) คือสมการของเบอร์นูลลี่ ที่สร้างขึ้นโดย Daniel Bernoulli ในปี ค.ศ. 1738 ซึ่งสามารถใช้ได้ดีกับของไหลที่กดอัดไม่ได้และมีความเสียดทาน (Frictionless Incompressible Fluid) อย่างไรก็ตาม สมการนี้สามารถที่จะใช้ได้กับของไหลจริง (มีความเสียดทาน) ที่กดอัดไม่ได้ซึ่งจะให้ผลถูกต้องในกรณีที่ผลจากความเสียดทานมีค่าน้อย

2.3 การเคลื่อนที่ของความร้อน โดยการนำความร้อน

การนำความร้อน คือการเคลื่อนที่ของความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปสู่บริเวณที่มีอุณหภมิต่ำในวัตถุ โดยที่ไม่มีการเคลื่อนไหวของโมเลกุลในวัตถุ แม้ว่าการนำความร้อนจะเกิดขึ้นได้ทั้งในตัวกลางที่เป็นของแข็ง ของเหลว และก๊าช ความร้อนถูกส่งผ่านตัวกลางที่เป็นของแข็งได้ดีที่สุด และในตัวกลางที่เป็นของแข็ง การถ่ายเทความร้อนจะเกิดขึ้นโดยการนำความร้อนเป็นส่วนใหญ่ หากตัวกลางเป็นวัตถุทึบแสง

ในการนำความร้อนจะถูกถ่ายเทโดยการสั่นสะเทือนของโมเลกุลของของแข็ง ส่วนของของแข็งที่ได้รับความร้อน จะถ่ายความร้อนให้แก่โมเลกุลในชั้นถัดไป ในลักษณะของพลังงานความสั่นสะเทือน (Vibration Energy) พลังงานความร้อนก็จะเคลื่อนที่ลึกเข้าไปในเนื้อของของแข็งเรื่อยๆ นอกจากนี้แล้ว การนำยังอาจจะเกิดจากการขนถ่ายความร้อนของอิเล็คตรอนที่มีอยู่ในของแข็ง เมื่ออิเล็คตรอนได้รับความร้อนก็จะมีพลังงานมากขึ้น เคลื่อนที่ไปสู่บริเวณที่เย็นกว่า ซึ่งในการนี้ก็จะนำเอาพลังงานความร้อนไปสู่บริเวณที่เย็นกว่าด้วย จากประสบการณ์ในชีวิตประจำวันของเราจะพบว่า โลหะนำความร้อนได้ดีกว่าอโลหะ ทั้งนี้ก็เพราะว่า โลหะมีโมเลกุลเรียงกันอยู่อย่างเป็นระเบียบ ความร้อนจึงถูกถ่ายเทผ่านไปในลักษณะของพลังงานความสั่นสะเทือนได้อย่างสะดวก และโลหะยังมีจำนวนอิเล็คตรอนอยู่มากมาย ซึ่งจะช่วยในการขนถ่ายพลังงานความร้อนได้อย่างดี ส่วนอโลหะนั้นโมเลกุลจะเรียงตัวกันอยู่อย่างไม่เป็นระเบียบ ไม่สะดวกในการที่ความสั่นสะเทือนจะเคลื่อนที่ผ่านโมเลกุลไปได้ และอโลหะมีอิเล็คตรอนอยู่น้อยมาก ในการที่ช่วยถ่ายเทความร้อน

2.4 ค่าการนำความร้อน (Thermal Conductivity)

เราวัดความสามารถในการนำความร้อนของสารด้วยปริมาณที่เรียกว่า ค่าการนำความร้อน (Thermal Conductivity) หรือใช้ตัวย่อว่า k ซึ่งจะมีหน่วยเป็น W/mK ในระบบ SI หรือ Btu/hft F ในระบบอังกฤษ สารที่มีความสามารถในการนำความร้อนสูง เช่น โลหะ ก็จะมีค่า k สูง ส่วนสารที่มีความสามารถในการนำความร้อนต่ำ เช่น สารจำพวกอโลหะก็จะมีค่า k ต่ำ k จึงเป็นคุณสมบัติประจำตัวของสารที่สำคัญมากในการที่จะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของความร้อนในสารนั้น เราสามารถเปรียบเทียบความสามารถในการนำความร้อนของสารต่างๆ โดยการเปรียบเทียบค่าของ k ของสารเหล่านั้น ค่า k ของสารต่างๆ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1 สารที่มีค่า k สูงจะเรียกกันว่า ตัวนำ (Conductor) สารที่มีค่า k ต่ำ จะเรียกกันว่า ฉนวน (Insulator)

ตารางที่ 2.1 ประมาณค่าของการนำความร้อนสำหรับวัตถุชนิดต่างๆ

วัตถุ	ค่าการนำความร้อน (k) (W/mk)
โลหะบริสุทธิ์	35 – 430
โลหะผสม	20 – 200
โลหะเหลว	9 – 90
ของเหลว (อโลหะ)	0.2 – 2.0
ของแข็ง (อโลหะ)	0.02 – 20
ฉนวน	0.02 – 40
ก๊าซ	0.002 – 0.2

2.5 สมการของโฟริเออร์ (Fourier Rate Equation)

โจเซฟ โฟริเออร์ (Joseph Fourier) นักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ได้เป็นผู้ที่ศึกษาการนำความร้อนอย่างละเอียด และจากการเก็บข้อมูลจากการทดลองได้พบว่า อัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำ แปรผันโดยตรงกับค่าการนำความร้อน พื้นที่ที่ตั้งฉากกับการไหล และอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิกับระยะทาง (Temperature Gradient) ในกรณีที่ค่าการนำความร้อนคงที่ โฟริเออร์ได้เสนอสมการที่ใช้ในการคำนวณอัตราการนำความร้อนซึ่งเรียกว่า สมการของโฟริเออร์ (Fourier Rate Equation) ดังนี้คือ

$$Q_x = -kA(dT/dx) \qquad \text{… (2.11)}$$

โดยที่ Q_x คืออัตราการเคลื่อนที่ของความร้อนในทิศทาง x k คือค่าการนำความร้อน A คือพื้นที่ที่ความร้อนเคลื่อนที่ผ่านและตั้งฉากกับทิศทาง x และ dT/dx คือการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิกับระยะทาง เครื่องหมายลบ แสดงว่าความร้อนจะเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่อุณหภูมิลดลงเสมอ

2.6 สมการในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates)

ในกรณีของแกนในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates) เราพิจารณาทิศทางของ r, θ และ z ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ความร้อนเข้าสู่ปริมาตรเล็กๆ ที่มีด้านยาว dr, dz และ r$d\theta$

จากสมการของโฟริเออร์ในทิศทางของรัศมีเขียนได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} dQ_r &= -kdA\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \\ &= -kdzrd\theta\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \end{aligned}$$

สมการของโฟริเออร์ที่ระยะทาง r+dr เขียนได้ดังนี้คือ

$$dQ_{r+dr} = -kdz(r+dr)d\theta\left[\frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)dr\right]$$

อัตราความร้อนที่เพิ่มขึ้นเมื่อพิจารณาถึงทิศทางของ r จะมีค่า

$$= dQ_r - dQ_{r+dr}$$

$$= kdzdrd\theta\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + kdzrd\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)dr$$

[ไม่คิดค่าของ $kdz(dr)^2 d\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)$ เพราะมีค่าน้อยมาก]

ในทำนองเดียวกัน ในทิศทางของ θ อัตราการเพิ่มขึ้นของความร้อนจะมีค่า

$$= dQ_\theta - dQ_{\theta+d\theta}$$

$$= -kdrdz\frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + kdrdz\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right)rd\theta\right]$$

$$= -kdrdz\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right)rd\theta$$

โดยอัตราการเพิ่มขึ้นของความร้อนในทิศทางของ z จะมีค่า

$$= dQ_z - dQ_{z+dz}$$

$$= kdrrd\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dz$$

ค่าการเพิ่มขึ้นของความร้อนของรูปปริมาตรทั้งหมดอันสืบเนื่องมาจากการนำความร้อน จะมีค่า

$$dQ_n = kdzdrd\theta\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + kdzrd\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)dz$$

$$+ kdrdz(1/r^2)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right)rd\theta + kdr.rd\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dz$$

หาก q_g เป็นค่าการผลิตความร้อนภายในปริมาตรต่อหน่วยปริมาตร อัตราการผลิตความร้อนภายในจะมีค่า

$$dQ_g = q_g drdz.rd\theta$$

อัตราการเพิ่มของพลังงานความร้อนของลูกบาศก์จะเขียนได้ดังนี้คือ

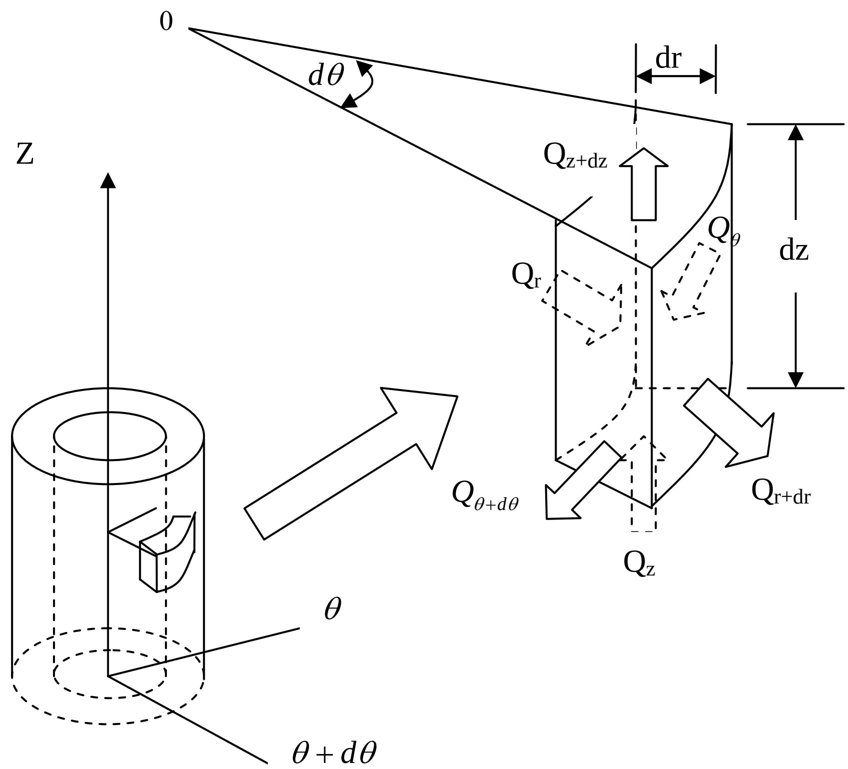
$$dQ_g = rd\theta.dz.dr\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

จากกฎของการไม่สูญหายไปของพลังงาน เราจะได้ว่า

$$kdz.dr.d\theta\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)+kdz.rd\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)dr+kdr.dz(1/r^2)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right)rd\theta$$
$$+kdr.rd\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)dz+q_g drdzrd\theta = rdz.drd\theta\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

หรือ

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z}\right)+\left(\frac{q_g}{k}\right)=\left(\frac{\rho C_p}{k}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \qquad \text{... (2.12)}$$



รูปที่ 2.1 การนำความร้อนเข้าและออกจากปริมาตรควบคุม $dr.rd\theta.dz$ เพื่อวิเคราะห์ในพิกัดทรงกระบอก

2.7 ค่าการแผ่กระจายความร้อน (Thermal Diffusivity)

ค่าการแผ่กระจายความร้อนซึ่งเกิดในสมการ $V^2T = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ เป็นปริมาณที่ให้โดยสมการ

$$\alpha = k / \rho c_p$$

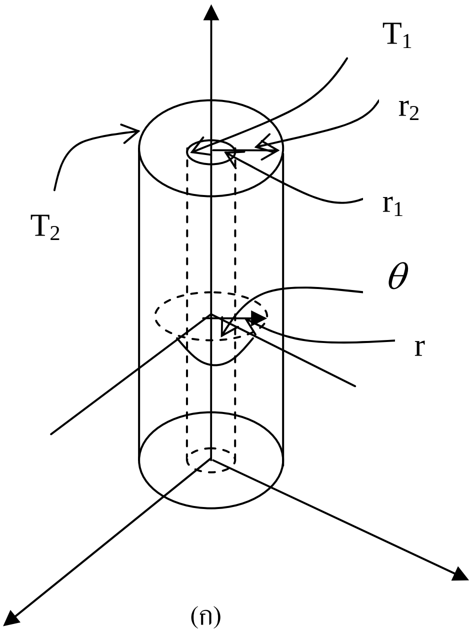
จะเห็นได้ว่า ค่าการแผ่กระจายความร้อนขึ้นอยู่กับค่าการนำความร้อน ความหนาแน่น และความร้อนจำเพาะของสาร เราศึกษาค่าการแผ่กระจายความร้อนของสารต่างๆ ได้โดยการคำนวณตามสมการข้างต้น ตารางที่ 2.2 ให้ค่าการแผ่กระจายความร้อนของโลหะ และอโลหะบางชนิด จะเห็นว่า ค่าการแผ่กระจายความร้อนของสารแต่ละชนิดต่างกันมากมาย ค่าการแผ่กระจายความร้อนของเงินมีค่าสูงกว่าของยางถึงประมาณ 2000 เท่า ค่าของการแผ่กระจายความร้อนบ่งบอกถึงความเร็วของการเคลื่อนที่ของความร้อนในวัตถุ วัตถุใดที่มีค่าการแผ่กระจายความร้อนสูง ความร้อนก็จะแผ่กระจายไปในวัตถุนั้นได้รวดเร็ว

ตารางที่ 2.2 ค่าการแผ่กระจายความร้อนของโลหะและอโลหะบางชนิด

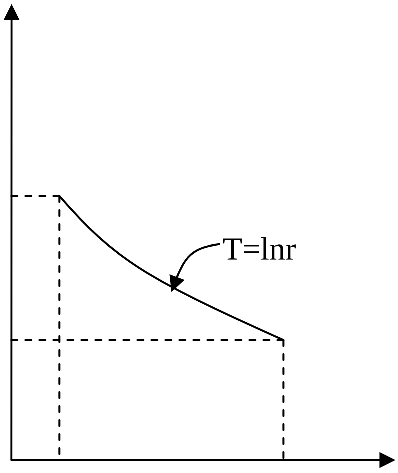
ชนิดของสาร	**อุณหภูมิเฉลี่ย**		**ค่าการแผ่กระจายความร้อน**	
	$^\circ C$	$^\circ F$	$\alpha \times 10^6$	
			m^2 / s	ft^2 / s
โลหะ				
อลูมิเนียม	0	32	85.9	3.33
ทองแดง	0	32	114.1	4.42
ทอง	20	68	120.8	4.68
เหล็กบริสุทธิ์	0	32	18.1	070
เหล็กหล่อ	20	68	17.0	0.66
ตะกั่ว	70	21.1	25.5	0.95
ปรอท	0	32	4.44	0.172
นิเกิล	0	32	15.5	0.60
เงิน	0	32	170.4	6.60
เหล็กเหนียว	0	32	12.4	0.48
สังกะสี	0	32	41.3	1.60
อโลหะ				
แอสเบสตอส	0	32	0.258	0.010
อิฐ	204.4	400	0.516	0.020
ไม้คอด	37.8	100	0.155	0.006
แก้ว	-	-	0.594	0.023
น้ำแข็ง	0	32	1.187	0.046
ยาง	-	-	0.077	0.003
น้ำ	0	32	0.129	0.005

2.8 การนำความร้อนผ่านผนังรูปทรงกระบอก

การนำความร้อนผ่านผนังของรูปทรงกระบอก มีความสำคัญมาก เพราะในระบบต่างๆ ทางวิศวกรรมศาสตร์ เรามักจะใช้ท่อรูปทรงกระบอกในการขนถ่ายของไหลชนิดต่างๆ และเพื่อป้องกันการสูญเสียความร้อนจากท่อ เรามักจะใช้ฉนวนความร้อนรูปทรงกระบอกในการหุ้มท่อ การเคลื่อนที่ของความร้อนในแนวรัศมีนี้ เป็นการเคลื่อนที่แบบมิติเดียว เพราะส่วนมาก อุณหภูมิของพื้นผิวของท่อจะมีค่าคงที่



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.2 การนำความร้อนของรูปทรงกระบอกตามแนวรัศมี
และการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิผนัง

เพื่อที่จะแก้ปัญหานี้ เราต้องใช้สมการ (2.12) คือ

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z}\right)+\left(\frac{q_g}{k}\right)=\left(\frac{\rho C_p}{k}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

สำหรับสภาวะสม่ำเสมอ $\partial T/\partial t=0$ นอกจากนี้แล้ว จะเห็นว่า อุณหภูมิจะไม่เปลี่ยนแปลงตามความยาวของรูปทรงกระบอก นั่นก็คือ $\partial^2 T/\partial z^2=0$ และอุณหภูมิตามเส้น รอบวงใดๆ จะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง หรืออาจกล่าวได้ว่า อุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อมุมเปลี่ยนไปที่รัศมีเดียวกัน ดังนั้น $\partial T/\partial\theta=0$ นอกจากนี้ เรายังพิจารณาในกรณีที่ไม่มีแหล่งพลังงานความร้อนในผนัง หรือ $q_g=0$

สมการข้างต้นจะลดลงเหลือ

$$\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial T}{\partial r}\right)=0$$

เนื่องจากไม่ต้องคำนึงถึงการเปลี่ยนปลงของอุณหภูมิในมิติอื่นๆ จึงเขียนสมการให้อยู่ในรูปสมการดิฟเฟอร์เรนเซียลธรรมดาได้ดังนี้คือ

$$\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{rdT}{dr}\right)=0$$

หรือ

$$\left(\frac{d^2T}{dr^2}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{dT}{dr}\right)=0$$

เพื่อที่จะแก้สมการดิฟเฟอร์เรนเชียลนี้ ลองให้ T=Blnr โดยที่ B เป็นค่าคงที่ (Constant) ซึ่งเราจะได้ว่า dT/dr=B/r และ $d^2T/dr^2=-B/r^2$ แทนค่าลงในสมการ จะเห็นว่า $-B/r^2+B/r^2=0$ ซึ่งหมายความว่า Blnr เป็นรากที่หนึ่งของสมการ

เพื่อที่จะหาค่าของ B พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ซึ่งเรารู้อุณหภูมิของผิวนอก และภายในของผนัง หรือ ที่ r_1 มีอุณหภูมิ T_1 และที่ r_2 มีอุณหภูมิ T_2

เราใช้สมการ T=Blnr จะได้ว่า

$T_1=B\ln r_1$ และ $T_2=B\ln r_2$

แก้สมการทั้งสองนี้เพื่อหา B จะได้ $B=\dfrac{T_1-T_2}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}$

อัตราการเคลื่อนที่ของความร้อน จะเขียนได้ดังนี้ คือ

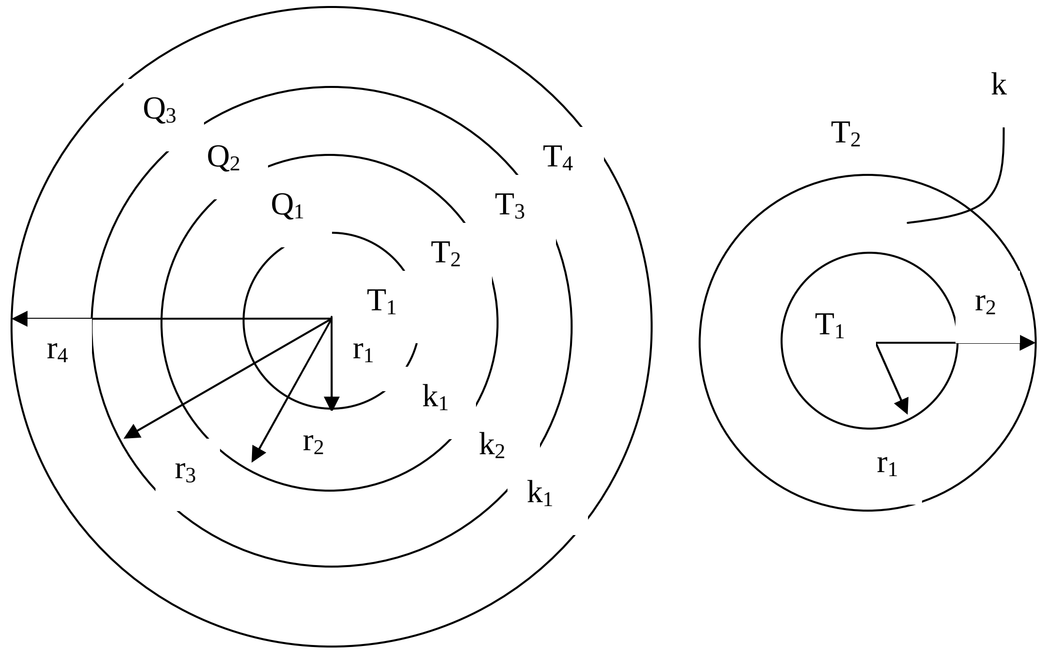
$$Q=-kA\left(\frac{dT}{dr}\right)$$

แทนค่า $A=2\pi rl$ และ $\left(\dfrac{dT}{dr}\right)=\dfrac{B}{r}$ เราจะได้

$$Q=\frac{2\pi kL(T_1-T_2)}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} \qquad \text{... (2.13)}$$

จะเห็นได้ว่า ในกรณีนี้ อุณหภูมิจะเปลี่ยนแปลงกับระยะทาง เป็นเส้นโค้งซึ่งให้ได้โดยสมการ T = Blnr ดังแสดงในรูปที่ 2.2ข

สำหรับรูปทรงกระบอกที่มีหลายชั้นนั้น เราสามารถหาสมการสำหรับคำนวณอัตราการเคลื่อนที่ของความร้อนได้ เช่นกัน จากรูปที่ 2.3ก โดยพิจารณาการถ่ายเทผ่านผนังรูปทรงกระบอกแต่ละชิ้น ดังนี้



(ก) ทรงกระบอกหลายชั้น (ข) ทรงกลม

รูปที่ 2.3 การนำความร้อนผ่านรูปทรงกระบอกหลายชั้นและรูปทรงกลม

สำหรับชั้นที่หนึ่ง

$$Q_1 = \frac{2\pi k_1 L(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

หรือ

$$T_1 - T_2 = \frac{Q_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_1 L}$$

สำหรับชั้นที่สอง

$$Q_2 = \frac{2\pi k_2 L(T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}$$

หรือ

$$T_2 - T_3 = \frac{Q_2 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_2 L}$$

สำหรับชั้นที่สาม

$$Q_3 = \frac{2\pi k_3 L(T_3 - T_4)}{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}$$

หรือ

$$T_3 - T_4 = \frac{Q_3 \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi k_3 L}$$

จากสภาวะสม่ำเสมอ จะได้ว่า $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ แก้สมการหา Q จะได้

$$Q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_3 L}\right]} \qquad \text{... (2.14)}$$

จากสมการที่ (2.14) อาจเขียนให้อยู่ในรูปความต้านทานได้ดังนี้

$$Q = \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

2.9 ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน (Overall Coefficient of Heat Transfer) และความต้านทานต่อการเคลื่อนที่ของความร้อน (Thermal Resistance)

จะเห็นได้จากสมการ (2.14) ว่า การที่จะคำนวณอัตราการเคลื่อนที่ของความร้อนได้นั้น จะต้องรู้อุณหภูมิของผิวของผนังทั้งภายในและภายนอกของท่อ แต่ในทางปฏิบัติจริงๆ เรามักจะไม่รู้ค่าของอุณหภูมิที่ผิว แต่จะรู้อุณหภูมิของของไหลที่อยู่ในบริเวณของผนังแต่ละด้าน ดังนั้น ถ้ามีสูตรการคำนวณการเคลื่อนที่ของความร้อนให้อยู่ในรูปของอุณหภูมิของของไหลทั้งสองข้าง ก็จะมีประโยชน์มากกว่า

ในการที่จะนำอุณหภูมิของของไหลเข้ามาไว้ในสมการนั้น จะต้องพิจารณาถึงการพาความร้อนด้วย เพราะสมการที่ใช้ในการคำนวณเรื่องการถ่ายเทความร้อนโดยการพา จะเชื่อมระหว่างอุณหภูมิของของไหล และอุณหภูมิของผิวของผนัง ในการหาสมการนั้น เราจะพิจารณาการถ่ายเทความร้อนจากของไหลที่มีอุณหภูมิสูง ไปยังของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำ ผ่านผนังซึ่งจะมีกี่ชั้นก็ได้ ความร้อนจะเคลื่อนที่จากของไหลมาสู่ผนังโดยการพา และเคลื่อนที่ผ่านผนังแต่ละชั้น โดยการนำ แล้วเคลื่อนที่จากผิวของผนังชั้นสุดท้ายไปสู่ของไหลโดยการพา หากว่าการถ่ายเทความร้อนมีสภาวะสม่ำเสมอ อัตราการเคลื่อนที่ของความร้อนผ่านผิวของผนังและผนังแต่ละชั้นย่อมมีค่าไม่เท่ากัน

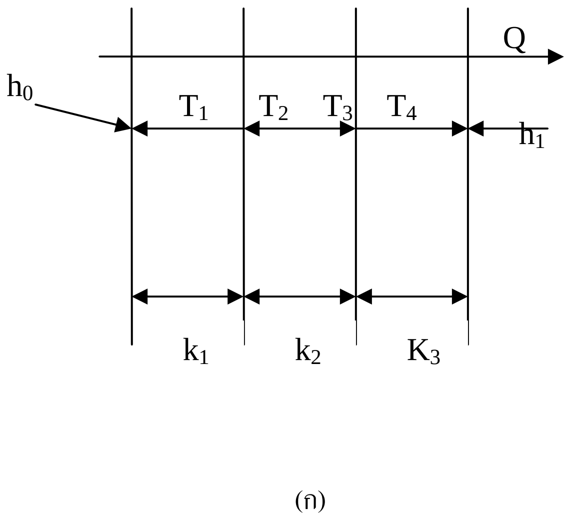
ในการคำนวณค่าของอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการพา ระหว่างของไหลและผนังนั้น จะต้องใช้สมการสำหรับการพาความร้อน คือ

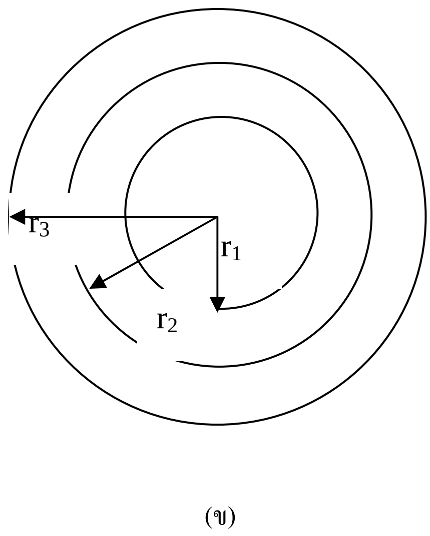
$$Q = hA(T_w - T_f)$$

เมื่อ A = พื้นที่ของผนัง

T_w = อุณหภูมิของผนัง

T_f = อุณหภูมิของของไหล





รูปที่ 2.4 ผนังราบและผนังรูปทรงกระบอกหลายชั้น